Vorwort

Ziele des Praktikums

Im Rahmen des Elektro-Labors werden Sie eine Reihe von Versuchen durchführen und dabei (so hoffen wir) Fähigkeiten erwerben, die für Ihr weiteres Studium und Ihren beruflichen Werdegang von Wichtigkeit sind. Es sollen die folgenden Ziele abreicht werden:

- Die für Ihr weiteres Hauptfachstudium wesentlichen elektrotechnischen Grundlagen sollen erarbeitet werden.
- Sie sollen praxisrelevante Grundlagen erlernen.
- Sie sollen Experimentierfähigkeiten und ein Grundverständnis für ingenieurhaftes Arbeiten entwickeln.
- Die Versuche sollten Ihnen die entsprechenden physikalischen Zusammenhänge qualitativ klarmachen.

Wichtiger als der Umgang mit abstrakten Formeln oder einer allzu stark quantitativ ausgeprägten Betrachtung der physikalischen Zusammenhänge (etwa durch Aufnahme unendlich langer Messreihen) ist also, dass Sie die Zusammenhänge eher qualitativ bis semi-quantitativ erfassen und verstehen lernen - also Antworten auf die Fragen finden:

- Wie hängen unterschiedliche physikalische und elektrotechnische Größen (die in einem Versuch eine Rolle spielen) grundsätzlich zusammen?
- Was sind die ablaufenden Prozesse?
- Was ändert sich am System (also an den anderen Größen), wenn ich an einer Stelle manipuliere?

Auch wenn die Messreihen nicht unendlich lang sind, um Antworten auf die Fragen zu finden, so wird doch das Vorbereiten, Ausführen und Auswerten von (quantitativen) Messungen eine wesentliche Rolle im Praktikum spielen. Der Umgang mit Messwerten (welche physikalische Größen beschreiben meine Messungen, wie stelle ich sie dar, und wie interpretiere ich sie) stellt dazu das „Handwerkszeug“ dar, das Sie nicht nur im Labor sondern auch später brauchen - im Prinzip immer dann, wenn sie mit irgendwelchen Größen hantieren, denen Zahlen zugeordnet und die irgendwie in Beziehung gesetzt werden.

Ihre Hausaufgabe zum ersten Labortermin

Um dieses „Handwerkszeug“ zu erlernen, sollten Sie das folgende Kapitel „Grundlagen zum Auswerten von Messergebnissen“ intensiv durcharbeiten. In den Abschnitt integriert sind acht Aufgaben, die Sie bitte als „**Hausaufgaben**“ bis zum ersten Labortermin bearbeiten. Die Antworten zu den Aufgaben 1, 2, 4 und 5 können Sie direkt in die entsprechenden Stellen im Skript eintragen. Ihre Ausarbeitungen zu den Aufgaben 3, 6, 7 und 8 fertigen Sie bitte auf Extra-Papier an. Beides - das Skript und Ihre Bögen - sollten Sie in Ihre Labormappe heften.

Am besten, Sie arbeiten das Skript durch, indem Sie - wenn Sie an einer Aufgaben „angekommen“ sind - diese zunächst bearbeiten und erst dann weiter lesen. Auf diese Art sollte der rote Faden durch das Kapitel transparenter und Ihr Lernprozess optimiert werden. Die Hausaufgabe geben Sie bitte beim ersten Versuchstermin Ihrer Betreuerin/Ihrem Betreuer zur Korrektur.

Ich wünsche Ihnen viel Erfolg und hoffentlich auch Spaß im Praktikum, und bitte scheuen Sie sich nicht, jedweden Kritikpunkt offen auszusprechen. Ein ständiges Feedback ist absolut wichtig für Verbesserungen!

Hagen Mikkat
April 2005

I. Messung und Angabe einzelner Größen

Voraussetzung für quantitative Aussagen über eine (physikalische) Größe ist deren Messung und die darauf basierende korrekte Angabe der gemessenen Größe. Bereits eine einfache Längenmessung (z.B. mit einem Lineal oder Zollstock) oder eine Zeitmessung (mit einer Stoppuhr) sind Beispiele hierfür.

1. Angabe eines Messwertes

Aufgabe 1: Mit dieser ersten Messung sollen Sie Ihre Masse bestimmen (man spricht meist umgangssprachlich von „Gewicht“ oder „Körpergewicht“, was streng physikalisch eigentlich nicht korrekt ist). Stellen Sie sich auf eine Personenwaage und lesen Sie die Anzeige ab (falls Sie keine eigene besitzen, können Sie vielleicht eine bei FreundInnen, im Sportstudio o.ä. benutzen - am besten wäre eine mit Digitalanzeige).

Ihre Masse beträgt: ....

Die Masse wird - wie jede physikalische Größe - angegeben durch eine Maßzahl (z.B. 71,2) multipliziert mit einer Einheit (in diesem Fall z.B. kg):

$$\text{Physikalische Größe} = \text{Maßzahl} \cdot \text{Einheit} \qquad (1)$$

Zur Angabe des Messwertes wird in der Regel:

- die physikalische Größe durch einen Buchstaben - ein so genanntes Formelzeichen – abgekürzt (die Wahl des Formelzeichens ist im Prinzip willkürlich, jedoch gibt es gewisse Konventionen, z.B. m für Masse, *t* für Zeit oder *T* für Temperatur. Die genannte Willkür äußert sich allerdings darin, dass in verschiedenen Büchern verschiedene Formelzeichen für die gleiche physikalische Größe verwendet werden. Es ist daher notwendig, die Zuordnung von physikalischer Größe und Formelzeichen immer anzugeben.)
- die Einheit wird durch ein Einheitenzeichen abgekürzt, z.B. Kilogramm durch kg
- das Multiplikationszeichen zwischen Maßzahl und Einheit wird weggelassen.
- Damit schreibt man also in der obigen Aufgabe z.B.: $m = 71{,}2$ kg (und nicht $m = 71{,}2 *$ kg).

Das Formelzeichen m steht für die physikalische Größe, also Maßzahl mal Einheit. Ist nur die Einheit der physikalischen Größe gemeint, so schreibt man [m], ist nur die Maßzahl gemeint: {m}.

Für das Beispiel bedeutet das: $m = 71{,}2$ kg, $\{m\} = 71{,}2$ und $[m] =$ kg, und Gleichung (1) lautet mit diesen Abkürzungen:

Eine Angabe ohne Einheit (z.B. $m = 71{,}2$) ist ebenso unvollständig und aussagelos wie eine Angabe ohne Maßzahl (z.B. $m =$ kg)! Die Maßzahl, die Sie bei einer Messung erhalten, hängt
immer davon ab, welche Einheiten sie verwenden. Umgekehrt kann niemand (nach einiger Zeit in der Regel auch Sie selbst nicht mehr) Ihre Messwerte „entschlüsseln“, wenn zu den Maßzahlen nicht die Einheit angegeben ist. Dies betrifft vor allem die Kennzeichnung dezimaler Vielfacher oder Bruchteile von Einheiten („Stellt mein Messwert nun eine Angabe in Zentimetern oder in Millimetern dar?“).

In Form eines tiefer gestellten **Index** rechts neben dem Formelzeichen kann man übrigens z.B. den „Adressaten“ oder die „Adressantin“ der Messung kennzeichnen - also an was oder wem gemessen wurde. So wäre ein korrektes Ergebnis der Messung (die auch Sie an sich durchgeführt haben) z.B.: $m_{\text{Uwe Mustermann}} = 71{,}2$ kg

Wie sieht es bei Ihnen aus? ....

Aufgabe 2: Wiederholen Sie nun die Messung Ihrer Masse noch zweimal und notieren Sie alle drei Resultate in korrekter Form.

..

..

Eventuell (insbesondere wenn Sie - wie gehofft - mit einer Waage mit Digitalanzeige gemessen haben) haben Sie nun nicht drei identische Messwerte vorliegen. Da sich Ihre Masse jedoch in dem kurzen Zeitraum ihrer Messungen vermutlich nicht geändert hat, ergeben sich die folgenden Fragen:

1. Wie kommt es zu den unterschiedlichen Resultaten bei den Wiederholungsmessungen?
2. Welches Resultat gibt man an?
3. Wie gibt man das Resultat der gesamten Messung (aus mehreren Einzelmessungen) korrekt an?

2. Messfehler

Ursache der Abweichungen sind so genannte **Messfehler**, die **grundsätzlich** bei jeder Messung auftreten und die dafür verantwortlich sind, dass der gemessene Wert vom tatsächlichen, dem so genannten **„wahren Wert“** abweicht.
Man unterscheidet zwischen drei verschiedenen Typen von Messfehlern:

Grobe Fehler

Grobe Messfehler beruhen grundsätzlich auf vermeidbaren Ursachen, wie Unachtsamkeit der messenden Person usw. (z.B. Sie benutzen eine englische Waage, welche die Masse ausschließlich in der Einheit „Stone“ anzeigt, geben das Ergebnis aber dennoch in kg an). Ein weiteres Beispiel ist der Verlust eines Satelliten vor ein paar Jahren, als die Techniker aus USA und Europa ihre Berechnungen nicht einheitlich in Kilometern bzw. Meilen führten.
Auch wenn bei Ihnen die Folgen nicht derart verhängnisvoll sein dürften, sollten Sie grobe Fehler vermeiden! Übrigens zählen zu den groben Fehlern auch Zählfehler, die grundsätzlich vermeidbar sind.

Systematische Fehler

Im Gegensatz zu groben Fehlern sind systematische Fehler durch den Messvorgang selbst bedingt und **unvermeidbar**. Bei Wiederholung einer Messung unter konstant gehaltenen Bedingungen bleibt ein systematischer Fehler unverändert (z.B. ergibt eine Personenwaage, deren Nullpunkt verstellt ist, systematisch zu große oder zu kleine Werte). Systematische Fehler sind oft schwierig zu entdecken und häufig kaum quantitativ abschätzbar. Ein allgemeines Verfahren zu ihrer Erfassung gibt es nicht. Da sie von der spezifischen Messanordnung abhängen, ist es oft von Nutzen, dieselbe Größe auch nach einem anderen Verfahren zu bestimmen und die Ergebnisse miteinander zu vergleichen.
Wenn ein systematischer Fehler erkannt wurde, sollte nach Möglichkeit die Ursache beseitigt oder zumindest das Messergebnis entsprechend korrigiert werden.
Ein Typ von systematischen Fehlern sind *Digitalisierungsfehler:* Dieser Fehlertyp tritt grundsätzlich bei digitalen Anzeigen von Messgeräten auf. Diese Anzeigen sind immer auf die letzte Stelle gerundet. Eine digitale Messzahl von 3,3 (ohne weitere Nachkommastelle) bedeutet z.B., dass die Maßzahl zwischen 3,25 und 3,35 liegt. Die Anzeige besitzt also eine so genannte absolute Unsicherheit von (mehr zum Begriff absolute Unsicherheit bzw. absoluter Fehler im nächsten Abschnitt 3).

Zufällige Fehler

Zufällige Abweichungen sind daran zu erkennen, dass bei Wiederholungen der Messung unter konstant gehaltenen Bedingungen eine statistische Streuung der Messergebnisse auftritt. Sie werden hervorgerufen von während der Messung nicht erfassbaren und nicht beeinflussbaren Änderungen der Messgeräte, des Messgegenstands, der Umwelt und der messenden Person. Beispiele sind schnelle Netzspannungsschwankungen, Erschütterungen oder das Ablesen von Zeigerausschlägen mit einer gewissen Unsicherheit.
Zufällige Fehler können durch spezielle Rechenverfahren abgeschätzt werden und das umso präziser, je größer die Anzahl der ausgeführten Messungen ist.

3. Mittelwert und Schwankungsgrenzen

Die folgenden Ausführungen bzw. Formeln für Berechnungen beziehen sich **ausschließlich auf die Abschätzung von zufälligen Fehlern** (erst in Abschnitt 4 werden systematische Fehler wieder eine gewisse Beachtung finden). Üblicherweise werden Sie im Praktikum eine identische Messgröße nicht sehr oft messen. Aber dass Sie zwei bis drei - üblicherweise nicht übereinstimmende - Messwerte für eine zu ermittelnde physikalische Größe erhalten, kommt durchaus vor (siehe das gewünschte Resultat bei Aufgabe 2). Als korrektes Messergebnis geben Sie einen Mittelwert und die Schwankungsgrenzen an. Wie man diese Größen ermittelt, ist Inhalt dieses Abschnitts.

Mittelwert

Bereits intuitiv wird man als „Ergebnis“ einer Messreihe den arithmetischen Mittelwert1 der Messwerte angeben. Ist eine Größe x n-mal gemessen worden und sind x_1, x_2, ..., x_n die Einzelwerte, so berechnet sich der arithmetische Mittelwert[1] folgendermaßen:

$$\overline{x} = \frac{1}{n} = \sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{1}{n}\left(x_1 + x_2 + \ldots + x_n\right) \qquad (2)$$

1 Normalerweise spricht man einfach vom Mittelwert der Messwerte. Der Zusatz arithmetisch ist nur notwendig, falls eine Verwechslungsgefahr mit anderen Mittelwerten (geometrisch, harmonisch) besteht. Im Praktikum wird ausschließlich der arithmetische Mittelwert verwendet, weil er den wahren Wert am besten annähert.

(Das Zeichen Σ (sprich Sigma) steht für die Anweisung, alle Einzelwerte zu summieren). Daher werden wir den Mittelwert manchmal auch **Bestwert** nennen.

Schwankungsgrenzen

Die mathematisch korrekte Berechnung der Schwankungsgrenzen ist relativ aufwändig. Außerdem macht ihre Anwendung nur wirklich Sinn, wenn Sie viele Messwerte vorliegen haben. Da das im Praktikum (meist) nicht der Fall ist, werden sie üblicherweise eine Fehlerabschätzung durchführen, die hinreichend genau und normalerweise schneller durchzuführen ist, nämlich die Abschätzung des maximalen Fehlers.

$$\delta x = \frac{x_{max} - x_{min}}{2} \qquad (3)$$

Man bildet also die Differenz vom größten und kleinsten Messwert und teilt das Ergebnis durch zwei. Als vollständiges Ergebnis wird dann $\bar{x} \pm \delta x$ angegeben. Die Schwankungsgrenzen werden wir im Folgenden auch kurz Fehler nennen.

Absoluter und relativer Fehler

Gibt man das Ergebnis einer Mittelwert- und Fehlerberechnung in der Form $\bar{x} \pm \delta x$ an, so hat man den Fehler als **absoluten** Fehler angegeben, z.B. würde ein vollständiges Ergebnis lauten: m = 71,0 kg ± 0,2 kg. Der absolute Fehler hat immer die gleiche Einheit wie der Mittelwert.
Der **relative** Fehler ist definiert als das Verhältnis von absolutem Fehler zum Mittelwert. Für das Beispiel gilt:

$$\frac{0{,}2}{71{,}0} = 0{,}003$$

Der relative Fehler trägt keine Einheit! Er wird auch oft in Prozent angegeben. Dazu wird er einfach mit 100% multipliziert. Für das Beispiel folgt:

$$0{,}003 \cdot 100\% = 0{,}3\%$$

Man sagt, dass der Fehler des Messergebnisses 0,3% beträgt. Das Ergebnis würde also lauten: m = 71,0 kg ± 0,3 % * 71,0 kg.

Relativer und absoluter Fehler haben beide ihren Sinn. Einen (absolut gleichen) Fehler von 0,2 kg wird man verschieden bewerten, je nachdem, ob Sie sich selbst oder einen Brief wiegen! Der relative Fehler gibt sofort Auskunft, dass in letzterem Fall das Ergebnis der Messung viel unsicherer ist (bzw. das Messinstrument Personenwaage hier völlig ungeeignet ist).

Aufgabe 3:
a) Eine Länge *l* sei sechsmal gemessen (n = 6), wobei sich folgende Messwerte ergeben haben:[2]

$$l_1 = 37{,}3 \text{ cm}$$
$$l_2 = 35{,}5 \text{ cm}$$
$$l_3 = 36{,}8 \text{ cm}$$
$$l_4 = 38{,}7 \text{ cm}$$
$$l_5 = 37{,}8 \text{ cm}$$
$$l_6 = 37{,}2 \text{ cm}$$

Berechnen Sie Mittelwert und Schwankungsgrenzen (Fehler). Geben Sie das vollständige Ergebnis an, indem Sie den Fehler einmal als absoluten und einmal als relativen Fehler darstellen.
Denken Sie an die Einheiten!
b) Freiwillig: Berechnen Sie aus den drei Messwerten Ihrer Masse den Mittelwert und den absoluten Fehler. Geben Sie das vollständige Ergebnis der Messreihe „Bestimmung Ihrer Masse“ an.

Eine wesentliche Anmerkung -
Angabe des Ergebnisses mit angemessener Stellenzahl:

Stellen Sie sich vor, der Wert für eine Längenmessung sei einmal mit l = 37 cm und einmal mit l = 37,00 cm gegeben. Hätte man keine weiteren Informationen bezüglich Messunsicherheiten, so würde man diese beiden (mathematisch ja gleich großen) Werte unterschiedlich interpretieren.
Geht man nämlich davon aus, dass die Unsicherheit bzw. die Rundung in der letzten Stelle der Ziffernfolge liegt, so kann man im ersten Fall annehmen, dass der wahre Wert zwischen 36,5 cm und 37,5 cm liegt - man hätte also eine Schwankung von 1 cm bzw. auf 1 cm genau gemessen. Im zweiten Fall läge der wahre Wert zwischen 36,995 cm und 37,005 cm - mit einer Schwankung bzw. Messgenauigkeit von 0,01 cm = 1 µm!

---

2 Nicht nur „Adressaten“ von Messungen gibt man in Form von Indizes an, sondern auch wenn Messwerte durchnummeriert werden, gibt man die entsprechende Zahl als Index an. Das Nummerieren von Messwerten ist nicht grundsätzlich notwendig, aber in vielen Fällen sinnvoll, insbesondere, wenn später gezielt auf einzelne Messwerte bezug genommen werden soll.

Die Ziffern, die etwas über den Messwert und seine Genauigkeit aussagen, nennt man die **signifikanten Stellen** der Zahl. Führende Nullen sind keine signifikanten Stellen. - d.h. wenn Sie den Messwert für l in Kilometern angeben wollen, also statt l = 37 cm schreiben Sie l = 0,00037 km, so wird Ihr Ergebnis nicht genauer, und Sie gewinnen keine signifikanten Stellen dazu. Hingegen sind die Nullen rechts natürlich durchaus wichtig. Bei der Angabe l = 37 cm (und auch bei der Angabe l = 0,00037 km) hätten wir also zwei signifikante Stellen, bei l = 37,00 cm wären es vier.[3]

Bei der Angabe von Ergebnissen (Bestwerte und Schwankungen) sollten Sie nun folgendermaßen vorgehen:

- Fehlerangaben sollten in der Regel auf *eine* signifikante Stelle gerundet werden. Nur wenn diese eine 1 ist, ist eine Angabe auf zwei signifikante Stellen zulässig. Die Schwankung wird nie abgerundet, sondern immer aufgerundet (man macht den Fehler im Zweifelsfall lieber ein bisschen zu groß als zu klein).
- In der endgültigen Angabe des Messergebnisses ist dessen Stellenzahl so zu beschränken, dass die Nummer der letzten Stelle des Bestwertes mit der Nummer der letzten Fehlerstelle übereinstimmt: $\eta = (6{,}0 \pm 0{,}9) \times 10^{-4}$ Pas.

Diese Ergebnisangabe unter Berücksichtigung der signifikanten Stellen und der Rundungsregeln soll anhand der folgenden Tabelle verdeutlicht werden:

Ergebniszahl	6,78523	6,78523
Messunsicherheit	0,0394	0,00177
aufgerundete Messunsicherheit	0,04	0,0018
gerundete Endergebniszahl	6,79 ± 0,04	6,7852 ± 0,0018

Der Bestwert des Endergebnisses in der ersten Spalte hat somit drei signifikante Stellen, der in der zweiten Spalte fünf.

- Noch eine Anmerkung: Bei Zwischenergebnissen dürfen und sollten Sie ruhig mehr als die Anzahl der signifikanten Stellen „mitschleppen“ (mindestens eine zusätzlich), da sich zu grobe Rundungen an dieser Stelle natürlich auch auf das Endergebnis auswirken und es ungenauer als nötig machen könnten.

Kommen wir noch mal zurück zu Aufgabe 3 und erweitern diese:
c) Haben Sie das Ergebnis (Bestwert und Fehler) mit angemessenen Stellenzahlen angegeben?

4. Abschätzung von Messfehlern

Um den Bestwert und den zufälligen Fehler (Schwankung) möglichst korrekt zu bestimmen, sollten eigentlich - wie bereits gesagt - möglichst viele Messwerte aufgenommen werden (die sechs Messwerte in Aufgabe 3a sind dabei noch eine eher geringe Anzahl). Nun ist im Praktikum und auch in der alltäglichen Messpraxis eine Präzisionsbestimmung durch zahlreiche Wiederholungen derselben Messung eine seltene Ausnahme.

Der Normalfall ist sogar der, dass eine Größe x nach Einübung der notwendigen Sorgfalt nur einmal gemessen und der Fehler Δx geschätzt wird. Eine solche mit gesundem Menschenverstand ausgeführte Fehlerabschätzung hat erfreulicherweise die Eigenschaft, dass der geschätzte Fehler fast immer größer ausfällt als nötig[4] - Sie liegen also üblicherweise auf der sicheren Seite mit dem abgeschätzten Wert. Dennoch muss man zunächst ein Gefühl dafür bekommen, was die vernünftige Abschätzung von Fehlern angeht. Ein paar Tipps hierzu werden nun anhand der folgenden Beispiele gegeben:

Längenmessung

Im einfachsten Fall besteht das Problem darin, die Position von Anfangs- und Endpunkt der zu messenden Strecke auf einer Skala abzulesen.

Die Genauigkeit der Skala sei nur durch die Strichbreite begrenzt, eine falsche Eichung (systematischer Fehler) werde ausgeschlossen. Dann ist z.B. bei einem Abstand benachbarter Skalenstriche von 1 mm die Angabe eines Fehlers der Ablesung von 0,2 mm realistisch. Die Feststellung der Lage eines Punktes relativ zu einer Skala kann durch Parallaxe verfälscht werden (siehe Abbildung 1), wenn Punkt und Skala einen nicht zu vernachlässigenden Abstand voneinander besitzen. Dieser systematische Fehler kann z.B durch die Verwendung einer Spiegelskala ausgeschaltet werden. Dazu wird

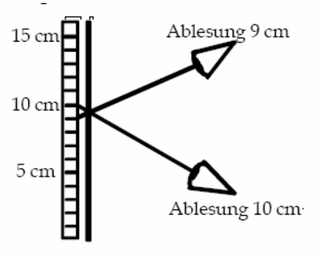

Abb. 1: Parallaxe

[3] Etwas problematisch ist es, wenn bei einer Zahl links vom Komma nichtsignifikante Nullen stehen. Sind beispielsweise bei dem Messwert 1200 N nur die 1 und die 2 signifikant, nicht aber die beiden Nullen, so kann man dies dem Wert nicht ansehen. Deshalb müsste man streng genommen eine andere Darstellung der Zahl wählen. Eine Möglichkeit wäre, die Maßeinheit zu vergrößern und 1,2 kN zu schreiben. Eine andere Möglichkeit ist die Potenzschreibweise: $1{,}2\ 10^3$N

[4] Nämlich größer als die Standardabweichung. Mehr dazu in Abschnitt 7.

bei der Ablesung mit dem Auge der Punkt und sein Spiegelbild zur Deckung gebracht.
Bei Längenmessgeräten wie Schublehre und Schraubenmikrometer wird der Fehler bzw. hier die Auflösung vom Hersteller angegeben. Übliche Werte sind 0,1 mm für die Schublehre und 0,01 mm für Schraubenmikrometer und Digitalschublehre.
Da die *Winkelmessung* nichts anderes als Längenmessung auf einer kreisförmigen Skala ist, lässt sich das bisher Gesagte auch darauf anwenden.

Zeitmessung
Die zufälligen und systematischen Gangabweichungen moderner quarzgesteuerter Stoppuhren sind so gering, dass sie bei den im Praktikum zu messenden relativ kurzen Zeitintervallen völlig zu vernachlässigen sind. Einen merklichen Einfluss auf das Messergebnis haben dagegen die beim manuellen Starten und Stoppen auftretenden personenbedingten Reaktionszeiten. Allerdings wirken diese immer in dieselbe Richtung (systematischer Fehler), so dass sie sich bei gleicher Bedingung für Start und Stop herausheben sollten. Dass dies nicht exakt geschieht, liegt an zufallsbedingten Schwankungen, die aber nach der Erfahrung für die früher übliche manuelle Zeitmessung bei sportlichen Wettkämpfen im Bereich weniger hundertstel Sekunden liegen. Um sie im Praktikum abzuschätzen, sollte bei jeder Zeitmessung eine Kontrollmessung durchgeführt werden.

Wägung
Bei Digitalwaagen können die systematischen Abweichungen durch eine regelmäßige Neukalibrierung beseitigt werden. Kalibrierung bedeutet die Justierung der Anzeige eines Messinstruments durch die/den BenutzerIn mithilfe eines so genannten Gebrauchsnormals. Eine besondere Kalibrierung ist übrigens die Eichung. Hier geschieht diese Justierung durch eine dazu befugte Behörde (z.B. Eichamt) mit einem amtlich zertifizierten Eichnormal (z.B. einer Kopie des Urkilogramms von Sèvres).

Druckmessung
Gasdrücke werden im Praktikum mit Quecksilbersäulen gemessen, da der Zusammenhang zwischen der zu messenden Größe (Druck) und der direkt ablesbaren Größe (Niveaudifferenz) einfach zu durchschauen ist.
Wenn in die Auswertung nur Druckverhältnisse eingehen, reduziert sich das Problem auf eine reine Längenmessung, für die das im Abschnitt „Längenmessung“ Gesagte gilt.

Elektrische Messungen
Bei *Digitalmultimetern* zur Messung von Spannung, Strom und Widerstand werden vom Hersteller zwei Arten von möglichen Abweichungen angegeben: eine relative, die proportional zum jeweils angezeigten Messwert ist, und eine absolute, die einen für den gesamten Messbereich konstanten Wert besitzt.
Eine typische Angabe ist z.B. (0,2 % rdg + 1 dg). Sie bedeutet, dass der Fehler sich aus 0,2% der aktuellen Anzeige (»reading«) und einer Einheit (»digit«) der letzten angezeigten Dezimalstelle zusammensetzt.
Die Abweichungen sind im Allgemeinen für die einzelnen Messgrößenarten und deren Bereiche verschieden, was von der jeweiligen inneren Messanordung und der Linearität ihrer Bauteile abhängt. Als Maßstab für die Güte des Instruments dient die »Grundgenauigkeit«, die mit der für die Gleichspannungsbereiche identisch ist (alle anderen sind geringer).
Auch bei *Zeigerinstrumenten* gibt es diese Arten von Abweichungen, nur werden sie hier pauschal zu einer »Güteklasse« zusammengefasst, welche die relative Abweichung vom Maximalausschlag in Prozent angibt. Multiplikation einer solchen Angabe mit dem jeweiligen Maximalwert des eingestellten Bereichs ergibt eine absolute Abweichung, die über die ganze Skala als konstant angenommen wird (was für kleine Messwerte eine Überschätzung der Fehler bedeutet). So berechnet sich z.B. für ein Messergebnis von 3,00 V im Bereich 5 V eines Instruments der Güteklasse 1,5 ein Fehler von 0,015 * 5 V = 0,08 V. Die Angabe einer Abweichung in Prozent des Maximalwertes ist auch bei anderen Analoginstrumenten wie Kompensationsschreibern und Oszilloskopen üblich.

5. Fehlerfortpflanzung (vereinfachtes Verfahren)

Häufig kommt der Fall vor, dass man es nicht nur mit einer einzelnen Messgröße zu tun hat, sondern mit mehreren Messgrößen, die - in einer mathematischen Formel miteinander verknüpft - erst das eigentlich interessante Ergebnis ergeben. Ist etwa nach einer Durchschnittsgeschwindigkeit gefragt, so errechnen Sie diese, indem Sie die zurückgelegte Strecke durch die dafür benötigte Zeit teilen. Beide Größen - Strecke und Zeit - können mit Fehlern (zufällig und systematisch) behaftet sein. Das Endergebnis wird dann einen Fehler aufweisen, der durch die Fehler der einzelnen Messwerte bedingt ist. Man spricht von Fehlerfortpflanzung.
Für die Fehlerfortpflanzung gibt es mathematisch aufwändige Verfahren, die berücksichtigen, dass sich Fehler von mehreren Messwerten im Allgemeinen nicht in ungünstiger Weise auswirken (müssen), sondern sich ausgleichen oder sogar aufheben können. Stellen Sie sich etwa vor, Sie haben Ihre Strecke um den gleichen Prozentsatz zu lang gemessen wie Ihre Stopp-Uhr zu langsam

geht. Dann wird die Durchschnittsgeschwindigkeit wieder „passen". Im Folgenden werden Sie eine vereinfachte Methode für die Fehlerfortpflanzung kennen und nutzen lernen, die für unsere Zwecke völlig ausreichend ist. Diese berücksichtigt dann allerdings nicht die genannte Möglichkeit, dass sich Fehler verschiedener Messwerte ausgleichen können.

Aufgabe 4: Was bedeutet dies für den Gesamtfehler (des Endergebnisses)? Wird der (eventuell) als zu groß oder zu klein angenommen?

...

Dass man einen zu großen oder zu kleinen Fehler für das Endergebnis erhält, ist nicht weiter schlimm. Immerhin erhält man einen groben Anhaltspunkt, der als Abschätzung gut genug ist.

Nun zu dem Verfahren:
(**Aufgabe 5 besteht darin, die fehlenden Stellen in den im folgenden kommenden Gleichungen „aufzufüllen"**)

Stellen Sie sich vor, Sie unternehmen eine Fahrradtour, auf der Sie 135 km zurücklegen. Diese Strecke haben Sie ungefähr mit einem Lineal und einer Landkarte abgeschätzt (einen Fahrradtacho bzw. -computer besitzen Sie nicht!). Es ist mit einem Fehler von 3 km zu rechnen. Sie haben beim Losfahren und Ankommen auf die Uhr geguckt und sind zu dem Ergebnis gekommen, dass Sie 6 Stunden und 30 Minuten gebraucht haben – mit einer Unsicherheit von 3 Minuten.
Wie der Mittel- oder Bestwert berechnet wird, dürfte klar sein. Man teilt den Mittelwert der Strecke durch den der benötigten Zeit. Also:

$$\bar{v} = \frac{\bar{s}}{\bar{t}}$$

Dabei gilt:

s = 135 km	(also die mittlere Strecke in Kilometern)
t = 6,50 h	(die mittlere Zeit in Stunden - dabei muss die Minutenangabe (30 min) in Stunden umgerechnet, also durch 60 geteilt, werden)

Es ergibt sich also

$$\bar{v} = \frac{\bar{s}}{\bar{t}} = \frac{135\text{ km}}{6,50\text{h}} =$$

Für diese und die weiteren Berechnungen stellt sich die Frage, wie viele Nachkommastellen anzugeben sind, was uns auf die angemessene Stellenzahl zurückbringt. Hier gilt ganz einfach folgende **Regel: Multipliziert oder dividiert man zwei Messwerte, so hat das Ergebnis so viele signifikante Stellen wie die kleinste Zahl von signifikanten Stellen der Ausgangszahlen.**

Zähler und Nenner haben jeweils drei signifikante Stellen, womit also das Ergebnis ebenfalls mit drei signifikanten Stellen anzugeben ist.
Was gilt nun für den Fehler? Im Wesentlichen benötigt man - wenn auch in abgewandelter Form - die Formel 2, nach der sich der maximale Fehler aus der Differenz von größtem und kleinstem (Mess-)Wert, geteilt durch zwei, errechnet. Nur, dass wir den größten und kleinsten Wert hier eben nicht direkt als Messwerte vorliegen haben, sondern erst ausrechnen müssen. Wir benötigen also den „größtmöglichen" und den „kleinstmöglichen" Wert für die Geschwindigkeit - in Formelzeichen v_{max} und v_{min}.
Nun sind Sie gefragt. Wir wissen, dass gilt:

s_{max} = ...

s_{min} = ...

Außerdem gilt:

t_{max} = ...

t_{min} = ...
(vergessen Sie nicht die korrekte Umwandlung in Stunden)

Wie erhält man nun aus diesen den maximalen und minimalen Wert für die Geschwindigkeit? Offensichtlich gilt:

$$v_{max} = \frac{s_{max}}{t_{min}} = \underline{\qquad\qquad\qquad} = \ldots\ldots\ldots$$

$$v_{min} = \frac{s_{min}}{t_{max}} = \underline{\qquad\qquad\qquad} = \ldots\ldots\ldots$$

(Ein Bruch wird umso größer, je größer der Zähler und je kleiner der Nenner ist. Ein Bruch wird umso kleiner, je kleiner der Zähler und je größer der Nenner ist!)
Das Ergebnis für den maximalen Fehler beträgt somit:

$$\delta\bar{v} = \frac{v_{max}-v_{min}}{2} = \underline{\hspace{6cm}} = \dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

(Denken Sie stets an die Einheiten!)

Als Endergebnis erhält man also

$$\bar{v} \pm \delta v = \bar{v} \pm \frac{v_{max}-v_{min}}{2} = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Zum Schluss sollte man immer noch einmal kurz überlegen, ob der erhaltene Fehler wirklich Sinn macht bzw. realistisch ist.
In diesem Beispiel haben Sie den Fehler für die Verknüpfung Division berechnet. Bei den anderen drei wichtigsten Verknüpfungen Addition, Subtraktion und Multiplikation wird entsprechend verfahren: Soll etwa die Grundfläche eines rechteckigen Raumes berechnet werden, und Länge a und Breite b sind jeweils mit einem Fehler δa bzw. δb versehen. Dann müssen maximale Fläche A_{max} und minimale Fläche A_{min} berechnet werden. Für A_{max} gilt etwa:

$$A_{max} = a_{max}\, b_{max} = (a + \delta a)\ (b + \delta b)$$

Schließlich teilt man die Differenz aus A_{max} und A_{min} durch 2 und erhält damit den Fehler.

Zum *relativen Fehler* bei den Verknüpfungen Multiplikation bzw. Division:
Für die Verknüpfungen Multiplikation und Division lässt sich übrigens folgende Regel zeigen: Der *relative* Fehler eines Produkts bzw. Quotienten von Messwerten ist die Summe der relativen Fehler der Messwerte. Diese Regel kann einem - gerade wenn sich das Ergebnis aus langwierigeren Brüchen ergibt die Fehlerberechnung erheblich erleichtern. Sie sollten dieses Berechnungsverfahren ebenfalls beherrschen und davon im Praktikum Gebrauch machen. Daher nun Aufgabe 6:

Aufgabe 6a: Berechnen Sie das Ergebnis zu Aufgabe 5 nochmals, aber diesmal indem Sie über die relativen Fehler von *s* und *t* den relativen Fehler von *v* berechnen. Diesen können Sie dann wieder in den absoluten Fehler umrechnen.

Anmerkung: Geht eine Größe in einen Bruch z.B. quadratisch ein, dann muss der relative Fehler doppelt gerechnet werden!

Setzt sich ein Endergebnis aus Summen oder Differenzen von fehlerbehafteten Messgrößen zusammen, so gilt die Regel, dass sich hier die absoluten Fehler addieren. Wenn Sie wollen, können Sie dies anhand des folgenden Beispiels überprüfen:

Aufgabe 6b: Man wiegt ein Gefäß mit einer Flüssigkeit darin und erhält m_{G+F} = 413 Gramm. Die Messunsicherheit beträgt δm_{G+F} = 1 Gramm. Anschließend wiegt man das Gefäß ohne Flüssigkeit und erhält m_G = 23 Gramm. δm_G beträgt auch hier 1 Gramm.
Fragen:
- **Wieviel wiegt die Flüssigkeit, und was können Sie über die Unsicherheit aussagen?**

Bevor wir uns im nächsten Abschnitt mit der grafischen Auswertung von Messwerten befassen, seien noch zwei Punkte angesprochen und eine Aufgabe betrachtet.
Erstens ergibt sich eine gesuchte Größe oft nicht durch einfache Addition, Subtraktion, Multiplikation oder Division zweier bzw. mehrerer Messwerte, sondern durch komplizierte Formeln, die sich aus Kombinationen verschiedener Rechenarten zusammensetzen. Auch der Fall, dass Messgrößen quadratisch oder als höhere Potenzen (oder als Wurzeln) eingehen, ist üblich. Stets sollten Sie sich auch bei komplizierteren Formeln die einfache Regel vor Augen halten: Man berechnet den maximalen sowie den minimalen Wert für das Ergebnis und teilt deren Differenz durch zwei. Damit hat man den Fehler für unsere Anwendungen hinreichend genau abgeschätzt.
Der zweite Punkt betrifft die „Empfindlichkeit“, mit der Messergebnisse die zu bestimmenden (End-)Größen beeinflussen und die sich daraus ergebenden Konsequenzen für Ihr Vorgehen.
Beispielsweise hängt der Volumenstrom einer Flüssigkeit durch einen Rohrquerschnitt von der vierten Potenz des Rohrradius ab, während die Rohrlänge nur linear eingeht. Folglich sollte der Radius viel genauer als die Länge gemessen werden. Oder anders herum ausgedrückt: Angenommen, Sie wüssten von vorn herein, dass der Wert für den Radius eine erhebliche

Unsicherheit aufweist. Dann ist es sinnlos, die Länge auf Bruchteile eines Millimeters genau zu bestimmen. Ähnliches gilt überhaupt immer, wenn eine in ein Endergebnis eingehende Messgröße mit einem erheblichen Fehler behaftet ist. In einem solchen Fall sollte man sich überlegen, wieviel Aufwand man in die Berechnung des Beitrags von anderen - viel kleineren - Fehlern zum Gesamtfehler investiert.
Was hier vielleicht noch abstrakt klingt, wird im Laufe des Praktikums anschaulicher werden, und Sie werden zunehmend ein Gefühl für die Handhabung der Messwerte und Fehler entwickeln. Um hierzu schon vor Beginn des Praktikums einen Beitrag zu leisten, sei folgende Aufgabe gestellt:

Aufgabe 7: Aus den Kantenlängen *a, b* und *c* soll das Volumen eines Quaders berechnet werden. Während die Kantenlängen von a und b jeweils nur mit eine kleinen Fehler behaftet sind, muss bei *c* von einem Fehler von 50% ausgegangen werden. Konkret sind die Zahlen:

a = 30,0 cm ± 0,1 cm, b = 40,0 cm ± 0,1 cm, c = 30 cm ± 15 cm

- **Berechnen Sie den gesamten Fehler (absoluten oder relativen - welcher ist günstiger?) einmal unter Einbeziehung sämtlicher Einzelfehler und einmal nur unter Berücksichtigung des Fehlers der Kante c.**

6. Grafische Auswertung von Messwerten

Zur Veranschaulichung und übersichtlichen Auswertung benutzt man oft grafische Darstellungen von Messreihen, da qualitative Zusammenhänge unmittelbar deutlich werden („Ein Bild sagt mehr als 1000 Worte“). Insbesondere wird es in den Versuchen häufig darum gehen, lineare, quadratische, wurzel oder logarithmische Zusammenhänge darzustellen. Wie man entsprechende Grafiken anfertigt und auswertet (einschließlich Fehlerbetrachtung), ist Gegenstand der folgenden Ausführungen.

Anfertigung einer grafischen Darstellung

Grafische Darstellungen werden *ausschließlich* auf Millimeterpapier gezeichnet. Der Maßstab sollte so gewählt werden, dass das Diagramm möglichst blattfüllend wird (außerdem sollte das Blatt hinreichend groß gewählt werden). In der Regel wird die unabhängige Variable (Ursache), also diejenige, die Sie eingestellt haben, entlang der Abzisse (x-Achse) und die abhängige Variable (Wirkung), diejenige, die von Ihnen abgelesen wird, entlang der Ordinate (y-Achse) aufgetragen.
Das Koordinatensystem wird wie folgt beschriftet (siehe Abbildung 2):

- Angabe der physikalischen Größen oder ihrer Symbole, z.B. „Masse“ bzw.“*m*“.
- Angabe der Einheiten, z.B. „g“ (für Gramm). Die Einheit wird durch einen Schrägstrich von der physikalischen Größe getrennt, z.B. „m/g“.
- Der Maßstab wird durch eine sinnvolle Achseneinteilung angegeben. Die Maßstabseinheit sollte in einer einfachen Beziehung zur mm-Einteilung stehen, z.B. 1 Einheit entspricht 1 cm oder 1 Einheit entspricht 2 cm (oder eben - wie hier - 1 Einheit entspricht 5 cm).
- Eine Überschrift erklärt die Grafik, z.B „Überprüfung des Hookeschen Gesetzes“.
- Der dargestellte Zusammenhang wird ausreichend und eindeutig erklärt.

Übrigens: Es macht keinen Sinn, die Messpunkte durch kurze Geradenstücke miteinander zu verbinden. Messwerte streuen, und physikalische Zusammenhänge verlaufen im allgemeinen glatt.

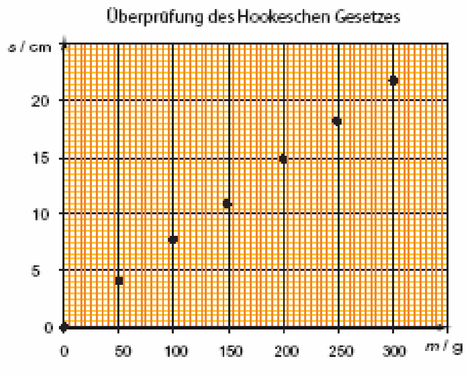

Abb. 2:
Grafische Darstellung zweier abhängiger Größen:Je größer die an die Feder angehängte Masse (Ursache), desto größer die Auslenkung der Feder (Wirkung). In einem Diagramm werden die Symbole der physikalischen Größen und ihre Einheiten angegeben („*m*/g“, „s/cm“). Die Messwerte werden deutlich als Punkte oder Kreuze eingezeichnet.

Grafische Auswertung linearer Zusammenhänge[5]

Es seien x_i, y_i Messwerte, für die theoretisch ein linearer Zusammenhang vorhergesagt wird.

Die entsprechende Funktion oder Funktionsgleichung lautet allgemein:

$$f(x_i) = mx_i + c$$

[5] Die Geradengleichung wird im folgenden als bekannt vorausgesetzt.

Ziel ist die Bestätigung der Linearität und/oder die Bestimmung der Parameter *m*, *c*. Hierzu werden die Messwerte grafisch aufgetragen. Zufällige Abweichungen führen zur Streuung der Messwerte y_i, d.h in der Regel gilt .

$$f(x_i) \neq y_i.$$

In einem Beispielversuch wird durch Zufuhr elektrischer Energie Wasser in einem Kalorimetergefäß erwärmt. Gemessen wird die Temperatur des Wassers in Abhängigkeit der Dauer der Energiezufuhr (die Zeit wird also auf der x-Achse aufgetragen und die Temperatur auf der y- (Achse). Die entsprechenden Messwerte werden zunächst in ein Koordinatensystem eingetragen (siehe Abbildung 3). Durch kritische Betrachtung der Darstellung ist zu erkennen, dass die Messpunkte statistisch um eine Gerade verteilt sind. Damit kann das Vorliegen eines linearen Zusammenhangs bereits *qualitativ* bestätigt werden.
Zur *quantitativen* Auswertung (d.h. Bestimmung der Parameter m, c*)* sind weitere Arbeitsschritte erforderlich, die im folgenden besprochen werden.

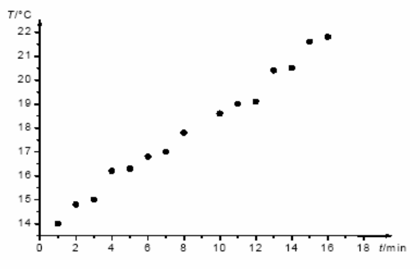

Abb. 3
1. Schritt:
Grafische Darstellung der Messpunkte

Zeichnen der Ausgleichsgeraden

Nach Augenmaß wird eine Gerade eingezeichnet, die „am besten zu den Messwerten passt", d.h. von der die Messpunkte möglichst wenig abweichen. Diese Gerade wird *Ausgleichsgerade* genannt.
Ausreißer, darunter versteht man Messwerte, deren Abweichung ungewöhnlich groß ist, bleiben beim Zeichnen der Ausgleichsgeraden unberücksichtigt, weil sie mit großer Wahrscheinlichkeit stärker fehlerbehaftet sind als die übrigen Werte (in dem Beispiel in den Abbildungen 3 - 6 sind keine Ausreißer dabei).
Die **Steigung** der Geraden ist gleich dem Parameter $m_{Ausgleich}$. $c_{Ausgleich}$ ist durch den **y-Achsenabschnitt** gegeben.

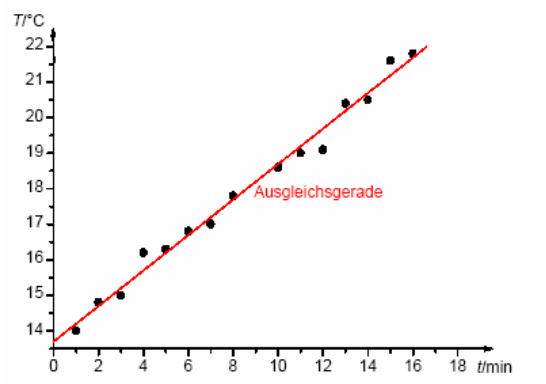

Abb. 4
2. Schritt:
Erkennen von „Ausreißern"
und Zeichnen der
Ausgleichsgeraden

Bestimmung der Steigung

Die Steigung berechnet sich aus dem Quotienten der Ordinatendifferenz y und der Abzissendifferenz x zweier Punkte P_1 , P_2 auf der Geraden. Man beachte, dass es sich hierbei *nicht* um Messpunkte handeln muß. Die Punkte sollen möglichst weit auseinanderliegen (wegen der höheren Genauigkeit). Zur Bestimmung der Differenzen Δx, Δy wird ein *Steigungsdreieck* gezeichnet (siehe Abb. 5).
Es gilt $\Delta x = x_2 - x_1$ und $\Delta y = y_2 - y_1$ und Steigung $m = \Delta y / \Delta x$.

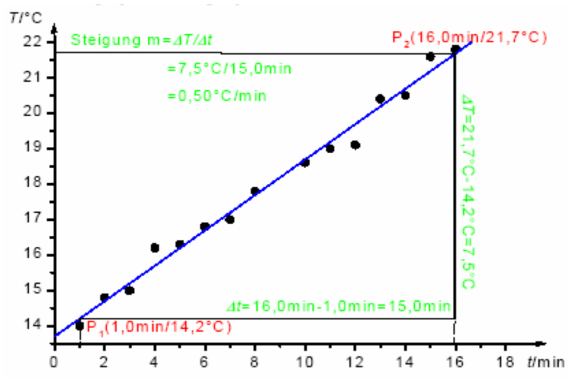

Abb. 5
3. Schritt:
Bestimmung der Steigung
aus dem Steigungsdreick

Beachten Sie, dass die auf der x- und y-Achse aufgetragenen Zahlen physikalischen Größen entsprechen, die entsprechend mit Einheiten zu versehen sind. Demzufolge trägt auch die sich ergebende Steigung *m* eine physikalische Einheit, die nicht vergessen werden darf!

Fehler der Geraden

Wegen der Streuung der Messwerte ist die Ausgleichsgerade mit Fehlern behaftet. Zur Bestimmung der Fehler werden unter Berücksichtigung der Streuung der Messwerte zwei weitere Geraden durch die Messpunkte gelegt, aus denen dann ein Fehler für die Parameter *m*, *c* berechnet werden kann. Diese Geraden werden *Grenzgeraden* genannt, und es entsteht bei deren Konstruktion ein so genannter Fehlerstreifen. Auch von den Grenzgeraden wird Steigung m_{Grenz}, wie oben beschrieben, bestimmt. Für den Parameter m - also die Steigung - erhält man:

$$m = m_{Ausgleich} \pm \delta m \quad \text{mit } \Delta m = \frac{|m_{1.Grenz} - m_{2.Grenz}|}{2} \tag{5}$$

Analoge Gleichungen existieren für den Parameter *c*.

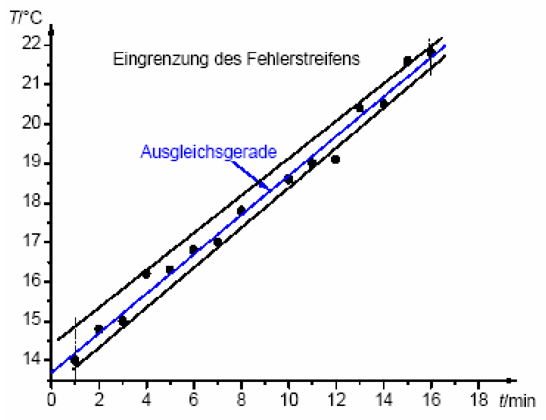

Abb. 6a - 6c: Anleitung zur Konstruktion der Grenzeraden und Ermittlung des Fehlers der Geradensteigung

Abb. 6a

Konstruktion der Grenzgeraden

Zur Konstruktion der Grenzgeraden schließt man mindestens 2/3 der Messpunkte möglichst eng in ein Viereck ein mit zwei zur y-Achse parallelen kurzen Seiten und zwei langen Seiten, deren Steigung von der der Ausgleichsgeraden verschieden sein kann (siehe Abbildung 6). Weichen einzelne Messpunkte besonders auffällig von der Ausgleichsgeraden ab, so schließt man sie nicht in das Viereck mit ein (Ausreißer). Durch verbinden der jeweils gegenüberliegenden Eckpunkte erhält man die Grenzgeraden. Der maximale Fehler der Steigung berechnet sich aus den Steigungen der Grenzgeraden entsprechend Gleichung 4. Die Genauigkeit der Steigung der Ausgleichsgeraden nimmt mit der Anzahl der Messpunkte zu.

Aus der folgen Abbildung 6 ergibt sich für die Steigungen der Grenzgeraden:
Steigung 1. Grenzgerade: $m_{1.Grenz}$ = 6,6 °C/15,0 min = 0,44 °C/min
Steigung 2.Grenzgerade: $m_{2.Grenz}$ = 7,6 °C/14,0 min = 0,55 °C/min
Daraus ergibt sich für den Fehler der Steigung:

$$\delta m = \frac{(0{,}55 - 0{,}44)\ °C/min}{2} = 0{,}06\ °C/min$$

Das Endergebnis für die Steigung lautet somit: m = (0,50 ± 0,06) °C/min

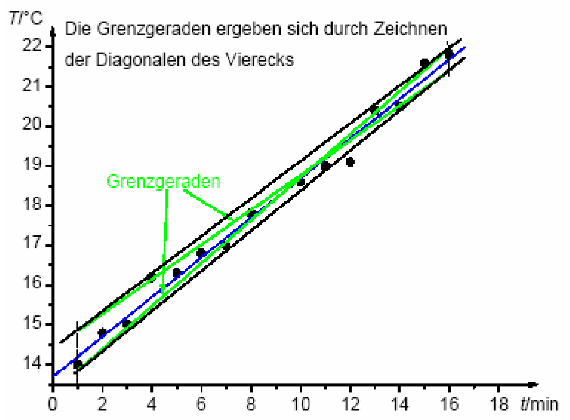

Abb 6b

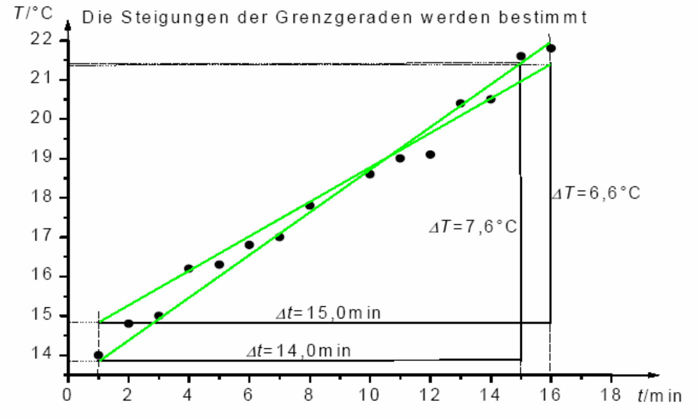

Abb. 6c

Ein Sonderfall - erster Messpunkt fehlerfrei

Manchmal hat ein Ergebnis einer Messreihe einen wohl definierten (genauen) Wert, der somit fehlerfrei ist. Dies muss bei der grafischen Auswertung entsprechend beachtet werden. Ein Beispiel ist das in Zusammenhang mit Abb. 2 erwähnte Hookesche Gesetz: Wird keine Masse angehängt, ist die zusätzliche Ausdehnung der Fehler gleich null. Der Punkt P (0/0) ist somit fest. Der Fehlerstreifen ist ein Dreieck, das von zwei vom jenem Punkt ausgehenden Strahlen begrenzt ist (siehe Abb. 7). In diesem Fall sind die Grenzgeraden mit den Begrenzungen des Fehlerstreifens identisch.

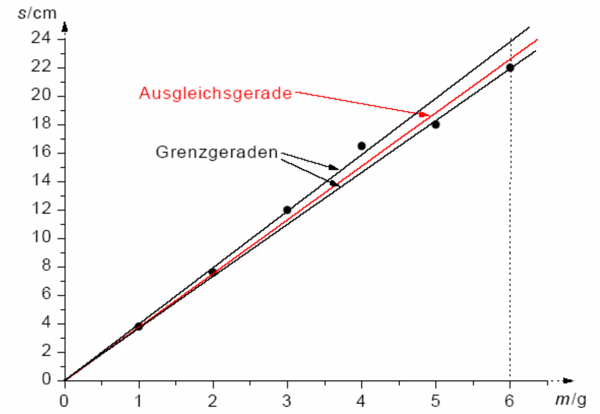

Abb. 7
Auswertung von Messpunkten, von denen einer fehlerfrei ist

Aufgabe 8: Folgende Werte von Spannung U und Strom I seien an einem Widerstand R gemessen worden:

U in V	0	1,05	2,10	3,05	4,95	7,10	9,05	9,95
I in A	0	0,012	0,028	0,035	0,062	0,090	0,111	0,125

Sie sollen den Widerstand R bestimmen, der gleich der Steigung m der Ausgleichsgeraden *U = m I + c* ist.
Dazu müssen Sie also die folgenden Arbeitsschritte durchführen:

- **Überlegen Sie zunächst, was Ursache (unabhängige Variable) und was Wirkung (abhängige Variable) ist. Dementsprechend nehmen Sie die Wahl der Achsen vor.**
- **Zeichnen Sie auf Millimeterpapier ein geeignetes Koordinatensystem, wählen Sie eine Überschrift, beschriften Sie die Achsen, und tragen Sie die Punkte ein. (falls Sie kein Millimeterpapier zur Hand haben, tut es auch „normales“ kariertes).**
- **Zeichnen Sie die Ausgleichsgerade ein.**
- **Zeichnen Sie ein Steigungsdreieck ein. Denken Sie dabei an zweierlei: erstens sollten die Punkte möglichst weit voneinander entfernt sein, und zweitens tragen Sie bitte die Differenzen mit Einheiten in Ihrem Steigungsdreieck ein! Ermitteln Sie die Steigung. Ist die Steigung bereits der Bestwert des Widerstandes R?**
- **Überlegen Sie, ob es sich hier um eine Messreihe mit einem wohl definierten Messwert handelt. Konstruieren Sie entsprechend den Fehlerstreifen, und zeichnen Sie die Grenzgeraden ein.**
- **Bestimmen Sie aus den Steigungen der Grenzgeraden den Fehler der Steigung und damit den Fehler von R.**
- **Geben Sie das Ergebnis (mit Einheiten!) an.**

Linearisierung

Im Praktikum werden Sie häufig auch nichtlineare Zusammenhänge mittels grafischer Auswertung diskutieren. Obwohl der Zusammenhang dann eben kein linearer mehr ist – also sich bei der grafischen Darstellung keine Gerade ergibt, ist eine Darstellung mittels Geraden - eine so genannte Linearisierung - dennoch möglich, wie das folgende Beispiel zeigt.

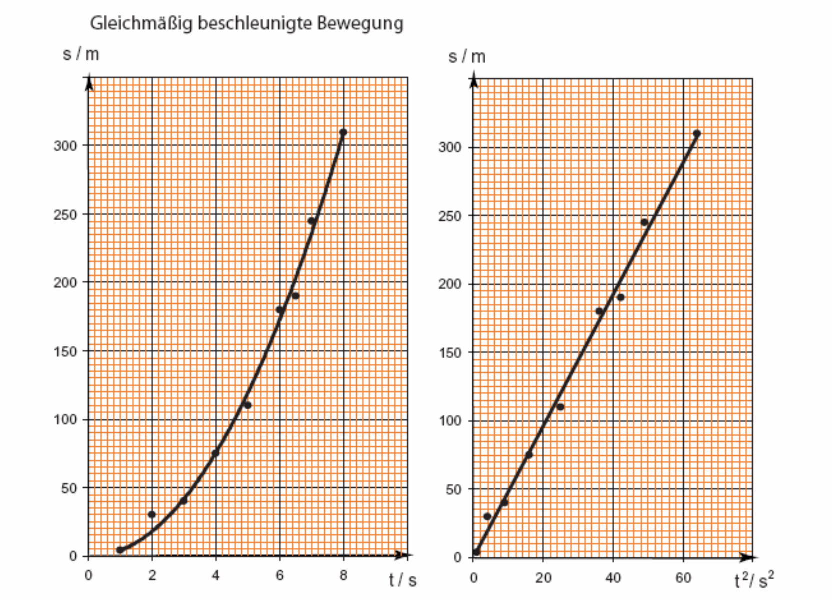

Abb. 8:
Überprüfung eines theoretischen Zusammenhangs durch linearisierte Darstellung

Beispiel dazu:
Überprüfung des Weg-Zeit-Gesetzes einer gleichmäßig beschleunigten Bewegung Der theoretische Zusammenhang lautet: $s(t) = 1/2\ a\ t^2$. Auftragen der Messwerte (s gegen t) ergibt einen nichtlinearen Anstieg (sondern hier eine Parabel). Die Größe *a* lässt sich nicht unmittelbar bestimmen. Die Parabel sollte linear werden, wenn *s* nicht gegen *t* sondern gegen t^2 aufgetragen wird. Durch die linearisierte Darstellung wird die Gesetzmäßigkeit offensichtlich (siehe Abbildung 7).

7. Für (sehr) Interessierte: Die Gaußsche Normalverteilung

Eher der Vollständigkeit halber und aufgrund seiner fundamentalen Bedeutung sei zum Abschluss dieses Fehlerrechnungskapitels auf die Normalverteilung eingegangen. Von unmittelbarem Nutzen - etwa insofern, dass Sie die im folgenden angegebenen Formeln im Praktikum benutzen würden -ist sie für Sie nicht, so dass Sie diesen Abschnitt auch auslassen können.

Hat man viele Messwerte einer Messgröße gewonnen und trägt die Häufigkeit der Messwerte pro Intervall gegen die Messwertintervalle auf, so erhält man in vielen Fällen (bei weitem nicht in allen!) eine sogenannte Gaußsche Kurve, oft auch Glockenkurve genannt (siehe Abbildung 8). Die Häufigkeitsverteilung der Messwerte lässt sich dann durch die folgende Formel beschreiben:

$$h(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}\right) \qquad (6)$$

Messwerte mit einer derartigen Verteilung heißen normalverteilt.

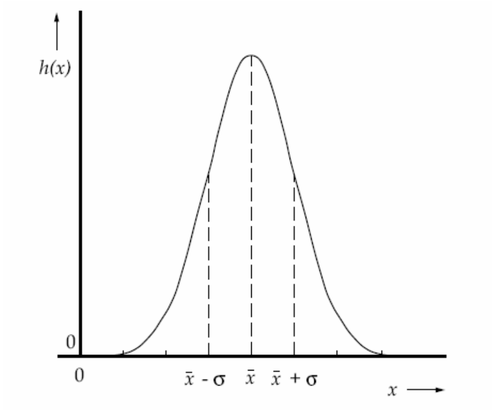

Abb. 9:
Gaußverteilung mit Erwartungswert und Standardabweichung σ

Wenn die Messung mit keinem systematischen Fehler behaftet ist, dann stimmt der in Gleichung 6 durch die maximale Messwertdichte definierte Wert mit dem wahren Wert überein. Andernfalls besteht eine Verschiebung zwischen den beiden Werten, die der systematischen Abweichung entspricht.
Wenn n die Anzahl der vorhandenen Messwerte ist, dann nennt man

$$\sigma = \sqrt{\left(\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2\right)} \qquad (7)$$

die Standardabweichung der Einzelbeobachtung. Der Parameter, der nach Abbilung 8 ein Maß für die „Breite" der Wahrscheinlichkeitsverteilung ist, heißt *Standardabweichung*. Er definiert die Lage der Wendepunkte der Funktion

und ist damit ein Maß für deren „Breite“. Die Standardabweichung ist ein Maß für die Qualität des Messverfahrens - bei einer hohen schlanken Kurve streuen die Messwerte schwächer um den Mittelwert als bei einer flachen breiten. Es gilt: Im Intervall liegen 68,3% aller Messwerte. Im Intervall [liegen 95,5% aller Messwerte, und im Intervall [liegen 99,7% aller Messwerte. D.h. je größer man seine Fehlergrenzen annimmt, desto berechtigter ist die Aussage, dass der Bestwert auch wirklich im angegebenen Intervall liegt (natürlich ist es Unsinn, ein beliebig großes Intervall zu wählen, da mit der Größe des Intervalls die Aussagekraft des Ergebnisses abnimmt).
Der arithmetische Mittelwert errechnet sich wie gewohnt aus:

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \qquad (8)$$

Aus Gleichung 8 geht hervor (wir haben uns bisher darüber keine Gedanken gemacht), dass jeder weitere - vom Mittelwert verschiedene - Messwert den Mittelwert verändert. Diese Unsicherheit des arithmetischen Mittelwerts wird beschrieben durch die Standardabweichung des arithmetischen Mittelwerts:

$$\Delta x = \sqrt{\left(\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2\right)} \qquad (9)$$

Wie man sieht, geht Δx aus δ hervor, indem man durch √n teilt. Diese Standardabweichung des arithmetischen Mittelwerts ist ein Maß für die Qualität der Messung und hängt von der Qualität des Messverfahrens und der Anzahl der Einzelmessungen ab, kann also dadurch verringert werden, dass die Anzahl der Einzelmessungen erhöht wird. Letztendlich ist die Standardabweichung des arithmetischen Mittelwerts die uns interessierende Größe. Allerdings ist ihre Berechnung umständlich (auch wenn die meisten Taschenrechner einige Funktionen zur Erleichterung bereithalten) und erst ab ca. 10 Messwerten einigermaßen sinnvoll zu interpretieren. Da diese Anzahl von Messwerten im Praktikum kaum erreicht wird, lohnt der Aufwand nicht, und das in Kapitel 3 behandelte Verfahren zur Abschätzung des maximalen Fehlers (Gleichung 2) reicht aus. Zur Information: Praktisch liegt der mit dieser Formel errechnete Wert bei fünf bis zehn Messungen häufig in der gleichen Größenordnung wie die dreifache Standardabweichung des arithmetischen Mittelwerts - ein für uns glücklicher Umstand.
Zum Schluss noch eine Übersicht über die dezimalen Vorsätze vor Einheiten:

II. Dezimale Vorsätze von Einheiten

Name	Abkürzung	Faktor		Name	Abkürzung	Faktor
Deka	da	10^{1}		Dezi	d	10^{-1}
Hekto	h	10^{2}		Zenti	c	10^{-2}
Kilo	k	10^{3}		Milli	m	10^{-3}
Mega	M	10^{6}		Mikro	µ	10^{-6}
Giga	G	10^{9}		Nano	n	10^{-9}
Tera	T	10^{12}		Pico	p	10^{-12}